

Unterrichtseinheit: Trigonometrie am Dach

Winkelberechnungen – Teil 1

Bei der Winkelberechnung an Dreiecken unterscheidet man zwischen „Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken“ und „Berechnungen an nicht-rechtwinkligen Dreiecken“.

Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken

Berechnung der Winkel

Für die Berechnungen der Winkel (w) in einem rechtwinkligen Dreieck stehen die folgenden Formeln zur Verfügung:

$$\sin(w) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \cos(w) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \tan(w) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Der zu berechnende Winkel bestimmt, ob eine Kathete eine Gegen- oder Ankathete darstellt. Gemäß dem dargestellten Dreieck würden die Formeln wie folgt aufgestellt sein:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} & \cos(\alpha) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} & \tan(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} \\ \sin(\beta) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} & \cos(\beta) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} & \tan(\beta) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Aufgabe 1 ☆

Bestimme anhand der Seitenangaben und des zu berechnenden Winkels die erforderliche Formel. Setze die Werte entsprechend ein.

- Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ hat die folgenden Werte:** $a = 3\text{cm}$; $c = 5\text{cm}$ (zu berechnender Winkel α)
- Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ hat die folgenden Werte:** $a = 3\text{cm}$; $c = 5\text{cm}$ (zu berechnender Winkel β)
- Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ hat die folgenden Werte:** $a = 3\text{cm}$; $b = 4\text{cm}$ (zu berechnender Winkel α)
- Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ hat die folgenden Werte:** $a = 3\text{cm}$; $b = 4\text{cm}$ (zu berechnender Winkel β)

Für die Berechnung eines Winkels (w) verwendet man im Taschenrechner die „Gegenfunktion“ (je nach Taschenrechner werden \sin , \cos und \tan mit hoch -1 oder mit arc beginnend angegeben):

$$\begin{aligned} \sin^{-1}\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\right) &= w & \cos^{-1}\left(\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\right) &= w & \tan^{-1}\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\right) &= w \\ \arcsin\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\right) &= w & \arccos\left(\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\right) &= w & \arctan\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\right) &= w \end{aligned}$$

Aufgabe 2 ☆☆

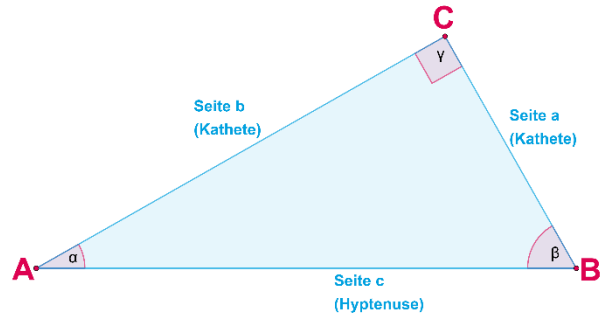
Berechne die Winkel aus Aufgabe 1. Runde auf ganze Zahlen. Vergleiche jeweils die Aufgabenteile zu α und β . Beschreibe deine Beobachtungen.

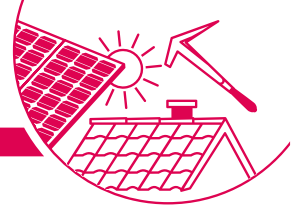


Schon gewusst?

Gegenkathete = Kathete liegt dem Winkel **gegenüber**.

Ankathete = Kathete liegt dem Winkel **an**.





Berechnung der Seiten

Durch Umstellung der Formeln lassen sich ebenfalls die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen:

$$a = c \cdot \sin(\alpha)$$

$$a = c \cdot \cos(\beta)$$

$$a = b \cdot \tan(\alpha)$$

$$b = c \cdot \sin(\beta)$$

$$b = c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b = a \cdot \tan(\beta)$$

Aufgabe 3 ☆☆☆

Berechne zu den folgenden Dreiecken die jeweils fehlende Seite a oder b.

- Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ hat die folgenden Werte:** $c = 10\text{cm}$; $\alpha = 30^\circ$ (gesuchte Seite a)
- Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ hat die folgenden Werte:** $c = 15\text{cm}$; $\beta = 45^\circ$ (gesuchte Seite b)
- Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ hat die folgenden Werte:** $b = 8\text{cm}$; $\alpha = 60^\circ$ (gesuchte Seite a)
- Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ hat die folgenden Werte:** $a = 7\text{cm}$; $\beta = 30^\circ$ (gesuchte Seite b)

Aufgabe 4 ☆☆☆☆☆

Stell dir vor, du bist Dachdecker oder Dachdeckerin in einem kleinen Familienbetrieb. Dein Betrieb bekommt einen neuen Auftrag: Ein Haus mit einer Gebäudebreite von 8 Metern soll ein neues Dach bekommen. Das Dach hat in der halben Gebäudebreite seinen höchsten Punkt. Es soll ein Satteldach werden. Das Dach hat eine Neigung von 15 Grad. Deine Aufgabe ist es nun, die Länge der Sparren zu berechnen, damit das neue Dach sicher und stabil wird. Sparren sind die schräg angebrachten Traghölzer, die das Dach tragen.

- Schau dir an, wie ein Satteldach aufgebaut ist. Frische dein Wissen mithilfe von Arbeitsblatt 1 auf.
- Fertige eine Skizze von einem Satteldach an.
- Berechne die Sparrenlänge.



Abbildung 1: Dachkonstruktion (Quelle: erstellt mit canva.com)

Bildnachweise:

Abbildung 1: erstellt mit canva.com

Grafiken: erstellt mit GeoGebra®, von Christian Leeser (<https://www.geogebra.org/?lang=de>)