



## Unterrichtseinheit: Goldener Schnitt – Geometrie der Schönheit

### Informationsblatt

Der Goldene Schnitt ist ein faszinierendes mathematisches Verhältnis, das in vielen Bereichen des Lebens, der Kunst, Bildhauerei, der Architektur und der Natur vorkommt. Es wird als besonders harmonisch empfunden und ist durch das Verhältnis der **Goldenen Zahl** beschrieben, oft dargestellt durch den griechischen Buchstaben Phi ( $\Phi$ ).

### Herleitung

Der Goldene Schnitt wird durch ein bestimmtes Verhältnis dargestellt. Hierbei gibt es zwei Sichtweisen:

- In den meisten Darstellungen wird auf das Verhältnis *längere Seite (Major) zur kürzeren Seite (Minor)* Bezug genommen. Der Wert dieses Verhältnisses wird als „Goldene Zahl“ bezeichnet und mit einem  $\Phi$  (großes Phi) beschriftet:

$$\phi = \frac{x}{a-x} = \frac{a}{x} \rightarrow \frac{\text{Major}}{\text{Minor}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618$$

- Das erste Verhältnis lässt sich ebenfalls als Kehrwert darstellen, als Verhältnis von kürzerer Seite zur längeren Seite. Der Wert dieses Verhältnis wird mit einem  $\varphi$  (kleines Phi) beschriftet:

$$\varphi = \frac{a-x}{x} = \frac{x}{a} \rightarrow \frac{\text{Minor}}{\text{Major}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618$$

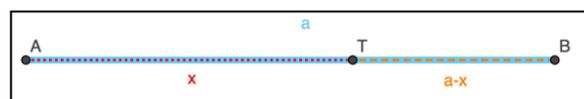


Abbildung 1: Strecke mit Goldenem Schnitt T (© GeoGebra)



#### GeoGebra-Datei 1

Lade dir folgende Datei herunter: „Vom Goldenen Schnitt und der Goldenen Zahl“

Zusammengefasst bedeutet dies: ein Verhältnis, das den Wert der „Goldenen Zahl“ ergibt, bezeichnet man als „Goldenen Schnitt“. Der Wert für  $\Phi$  (großes Phi) ist als *Konstante* definiert.

Der Wert für  $\varphi$  (kleines Phi) ergibt sich aus dem *Kehrwert*

von  $\Phi$  (großes Phi):  $\varphi = \frac{1}{\Phi}$

Diese Verhältnisse werden für die Berechnungen und *Zeichnungen* verwendet, um den Goldenen Schnitt anzuwenden.

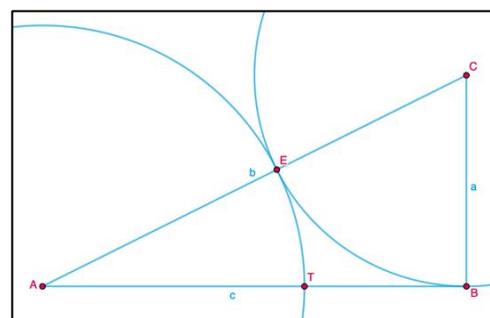


Abbildung 2: Goldenes Dreieck mit Goldenem Schnitt T (© GeoGebra)

Zu diesen *Zeichnungen* zählen ein **Goldenes Dreieck**, in dem der Goldene Schnitt T eingezeichnet wird. Dieser Punkt teilt die Seite c genau in dem Verhältnis wie oben dargestellt.

Wichtig ist, dass die Seite a die Hälfte von c misst. Durch das obige Verhältnis könnte man die Seiten im Dreieck berechnen. Wenn beispielsweise die Strecke AT = 6,18 cm lang wäre, dann könnte die Länge der Seite c wie folgt berechnet werden:

$$\frac{c}{AT} = 1,618 \quad | \cdot AT$$

$$c = 1,618 \cdot AT$$

$$c = 1,618 \cdot 6,18 \approx 10\text{cm}$$



#### Geogebra-Datei 2

Lade dir folgende Datei herunter: „Schritt für Schritt zum Goldenen Dreieck“



## Weiterführung

Es lassen sich ebenfalls Zeichnungen und Erkenntnisse aus der Mathematik über den Goldenen Schnitt verbinden. In dieser Weise sticht die **Fibonacci-Folge, die Fibonacci-Spirale und das goldene Rechteck** hervor.

Die *Fibonacci-Folge* entsteht durch Addition der aufeinanderfolgenden Zahlen, wobei die ersten beiden Zahlen mit 0 und 1 vorgegeben sind. Die weiteren Zahlen ergeben sich wie folgt:

$$0 + 1 = 1 \rightarrow 1 + 1 = 2 \rightarrow 1 + 2 = 3 \rightarrow 2 + 3 = 5 \rightarrow \dots$$

Diese Reihe lässt sich unendlich weiterführen.

Aus dem Beispiel ergeben sich die Zahlen: **0, 1, 1, 2, 3** und **5**.

Nimmt man diese Zahlen als Seitenlängen für Quadrate und setzt diese wie in Abbildung 3 nebeneinander zusammen, dann erhält man Quadrate, die wiederum Rechtecke im Goldenen Schnitt teilen. Diese Rechtecke bezeichnet man jeweils als „*Goldenes Rechteck*“. Fügt man in allen Quadraten jeweils einen Viertelkreis hinzu, dann erhält man die *Fibonacci-Spirale*.

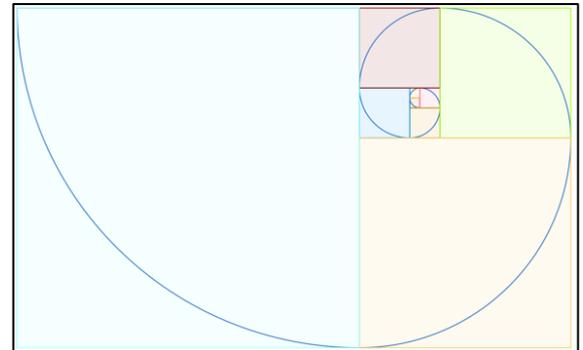


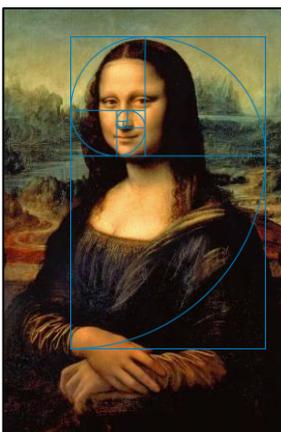
Abbildung 3: Goldene Rechtecke und Fibonacci-Spirale  
(© GeoGebra)



### Geogebra-Datei 3

Lade dir folgende Datei herunter: „**Schritt für Schritt – Goldenes Rechteck und Fibonacci-Spirale**“

Diese Umsetzung von Fibonacci-Folge zur Fibonacci-Spirale ist möglich, da in der Fibonacci-Folge die jeweils aufeinanderfolgenden Zahlen eine Annäherung an Phi ( $\Phi$ ) ergeben (wie oben beschrieben). Umso größer die Fibonacci-Zahlen, desto näher kommt man an die „*Goldene Zahl*“. Beispielsweise sind 5 und 8 sowie 2584 und 4181 aufeinanderfolgende Zahlen in der Fibonacci-Folge. Setzt man diese Beispiele in die zuvor beschriebenen Phi-Verhältnisse ein, dann erhält man mit  $\phi = \frac{8}{5} = 1,6$  eine etwas ungenaue Annäherung, während man mit  $\phi = \frac{4181}{2584} = 1,61803$  eine bessere Annäherung erhält (oder mit anderem Verhältnis  $\phi = \frac{5}{8} = 0,625$  und  $\phi = \frac{2584}{4281} = 0,61803$ ). Demnach erhält man mit Fibonacci-Zahlen *Näherungswerte* für den Wert des Goldenen Schnitts.



Mona Lisa und goldene Spirale

Foto: © Adobe Stock/surasak

Grafik: © Adobe Stock/YASUTAKA

Den **Goldenen Schnitt**, das **Goldene Dreieck**, das **Goldene Rechteck**, die **Fibonacci-Spirale** und die **Fibonacci-Zahlen** nutzen Künstlerinnen und Künstler (beispielsweise Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Salvador Dalí), Bildhauerinnen und Bildhauer (beispielsweise Phidias, Michelangelo) und viele andere kreative Köpfe als eine Art **Schablone**, um ihre Werke zu erschaffen. Denn die Natur selbst scheint dieses Verhältnis für ihre Kreationen verwendet zu haben, da sich dieses vom Menschen über die Tiere (beispielsweise Muscheln, Pferde) und den Pflanzen (beispielsweise Sonnenblumen, Rosen) bis zu den Insekten (beispielsweise Schmetterlinge, Ameisen) wiederfindet.